

4.11.15

ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ ΣΥΝΔΙΑΣΜΟΙ

Μια k μεταθεση από ένα σύνολο n -στοιχείων είναι μια διατεταγμένη (έχει σημασία η σειρά) επιλογή k στοιχείων.

Ένας k συνδιασμός από ένα σύνολο n στοιχείων είναι ένα υποσύνολο του A το οποίο αποτελείται από k στοιχεία.

π.χ. $A = \{1, 2, 3, 4\}$

3-μεταθεση: $(2, 1, 4) \neq (1, 2, 4) \neq (4, 2, 1) \neq (4, 1, 2) \neq (2, 4, 1) \neq (1, 4, 2)$

3-συνδιασμός: $\{1, 2, 4\} = \{2, 1, 4\} \dots$

Δίνει $3! = 6$ μεταθέσεις

Αν έχουμε n στοιχεία, τότε όλες οι n μεταθέσεις $M(n, n) = n!$

Αν έχουμε n στοιχεία, τότε όλες οι k -μεταθέσεις $M(n, k) = n(n-1) \dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

$$\frac{n}{1^u} \quad \frac{n-1}{2^u} \quad \frac{n-2}{3^u} \quad \dots \quad \frac{n-k+1}{k}$$

Ο αριθμός που μας δίνει όλες τους k -συνδιασμούς από n στοιχεία, είναι

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

Ότες ο μεταστέλλει είναι $\frac{n!}{(n-k)!}$

Ένας συνδυασμός μας δίνει $k!$ μεταστέλλει.

Αρα το πλήθος των συνδυασμών είναι $\frac{n!}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$

Θεώρημα: Κάθε $n > 1$ αριθμός, έχει έναν πρώτο διαιρέτη.

Θεώρημα (Ευκλείδης): Υπάρχουν άπειροι πρώτοι.

Απόδειξη: Έστω ότι υπάρχουν πεπερασμένοι πρώτοι $p_1, p_2, \dots, p_k$.

Υποθέτουμε: Τον $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k + 1$

Αν δείξουμε ότι είναι πρώτος, θα έχουμε άτονο.

Υποθέτουμε ότι δεν είναι. Αρα είναι σύνθετος.

Αρα διαιρείται από πρώτο p_i .

$$p_i / p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k + 1$$

$$p_i / p_i \Rightarrow p_i / p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$$

$$\text{Αρα ο } p_i \text{ διαιρεί } p_1 \cdot \dots \cdot p_{k+1} - p_1 \cdot \dots \cdot p_k = 1 \Rightarrow p_i / 1$$

Άτονο

Θεώρημα: Κάθε αριθμός $a > 1$ σύνθετος, έχει τουλάχιστον ένα πρώτο διαιρέτη $\leq \sqrt{a}$.

Απόδειξη: Έστω $a = bc$ με $1 < b, c < a$.

Έστω $c \leq b$ (το επιλέγουμε).

$$c^2 \leq b \cdot c = a \Rightarrow$$

$$c \leq \sqrt{a}$$

Αν c πρώτος, φέρθηκε

Αν c όχι πρώτος, τότε θα βρούμε έναν μικρότερο που θα τον διαιρεί.

Αρα θα διαιρεί και τον a .

Κόβουμε τον επόμενο:

Να βρεθούν όλοι οι πρώτοι, μικρότεροι του $a > 1$.

Εστω $a = 60$.

Βρες τους πρώτους $\leq \sqrt{60}$: 2, 3, 5, 7

Βρες όλα τα πολλαπλασιαστικά αλυσίδων $\rightarrow$ Από 1-60 όλοι εκτός των:

$\{p_1, 2p_1, 3p_1, \dots\}$

59, 53, 47, 43, 41, 37, 31, 29, 23, 19,

$\{p_2, 2p_2, 3p_2, \dots\}$

17, 13, 11, 7, 5, 3, 2

$\{p_k, 2p_k, \dots\}$

αυτοί που $x \nmid 60$.

Οι πρώτοι που έχουμε βρεθεί είναι στο σύνολο:

$\{2, 3, 4, \dots, a\} - (\{p_1, 2p_1, 3p_1, \dots\} \cup \{p_2, 2p_2, \dots\} \cup \{p_k, 2p_k, \dots\} \cup \{p_1, p_2, p_k\})$

Θεώρημα (χωρίς απόδειξη):

Αν ο p είναι πρώτος και $p \mid a \cdot b$, τότε $p \mid a$ ή $p \mid b$.

Θεώρημα: Κάθε αριθμός φυσικός > 1 γράφεται μοναδικά
σε γινόμενο πρώτων.

$n \times$	756	2
	378	2
	189	3
	63	3
	21	3
	7	7
	1	

$$2^{1+1} 3^{1+1+1} 7^1 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^0 \cdot 7^1$$

Πρωτεύουσ Ανώτατη.

Αντίστροφο: Έστω $a > 1$

Αν το a είναι πρώτος, δεν έχει άλλους γινόμενους.

Αν δεν είναι πρώτος, τότε $a = b \cdot c$.

Αν b είναι πρώτος, τον διαγράφουμε, αλλιώς $b = b_1 \cdot b_2$
και συνεχίζουμε ώστε να βρούμε 1 πρώτο b ο οποίος
τον διαγράφει.

$a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_l^{k_l}$, όπου $p_1, p_2, \dots, p_l$ διαδοχικοί πρώτοι
με $k_1, k_2, \dots, k_l$ φυσικοί ώστε $k_e \neq 0$.

Αν είχαμε δύο τρόπους να γράψουμε τον a , δηλ.

$$a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_l^{k_l} = q_1^{m_1} q_2^{m_2} \dots q_d^{m_d}$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει πρώτος p_i με $p_i \neq q_j, \forall j = 1, \dots, d$

$$p_i / a = q_1^{m_1} q_2^{m_2} \dots q_d^{m_d} \Rightarrow p_i / q_j, \text{ Αδύνατο}$$

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν διαφορετικοί εκθέτες:

$$a = p_1^{k_1} \dots p_l^{k_l} = p_1^{m_1} \dots p_l^{m_l}, \text{ με } k_i \neq m_i \text{ για κάποιο } i.$$

Αφού $k_i \neq m_i$ τότε κάποιας είναι μικρότερος $k_i < m_i$.

$$p_1^{k_1} \dots p_{i-1}^{k_{i-1}} p_i^0 p_{i+1}^{k_{i+1}} \dots p_l^{k_l} = p_1^{m_1} p_{i-1}^{m_{i-1}} p_i^{m_i} p_{i+1}^{m_{i+1}} \dots p_l^{m_l}$$

Αρα το 2° μέλος διατρέχεται από τον p_i , ενώ το 1° μέλος
δεν διατρέχεται. Τελικά:

$$a_1 = p_1^{k_1} \dots p_l^{k_l}$$

Μέγιστος Κοινός Διορθέτης & Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο

π.χ. 36 90

Έχουν κοινούς διορθέτες? 2, 3, 6, 9, 18

$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$

$$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

Κοινά διορθέτες: 2, 3, + γινόμενα τους ώστε να μην ξεπερνάμε τη μέγιστη δύναμη.
2, 3, 3², 2·3, 2·3² Μ.Κ.Δ

Το γινόμενο των διορθετών ενός μη μηδενικού ακεραίου, είναι πεπερασμένο. Άρα και το γινόμενο των κοινών διορθετών 2 ακεραίων μη μηδενικών είναι πεπερασμένο. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ο Μ.Κ.Δ. ο οποίος ονομάζεται Μ.Κ.Δ. & συμβολίζεται με (a, b). Επίσης είναι φυσικός.

π.χ. (36, 90) = 18, (-36, 90) = 18, (-36, -90) = 18.

Για να βρούμε το Μ.Κ.Δ των a, b χρειαζόμαστε τους a, b στην πρωτογενή τους αναπαράσταση.

$$a = p_1^{k_1} \dots p_l^{k_l}$$

$$b = p_1^{m_1} \dots p_l^{m_l}$$

Ο Μ.Κ.Δ των a, b είναι το γινόμενο των κοινών πρώτων, στη μικρότερη δύναμη τους.

$$(a, b) = p_1^{\min(k_1, m_1)} p_2^{\min(k_2, m_2)} \dots p_l^{\min(k_l, m_l)}$$

π.χ. $a = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0$

$$b = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

~~(a, b) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5~~

$$(a, b) = 2^{\min(2, 1)} \cdot 3^{\min(2, 2)} \cdot 5^{\min(0, 1)}$$